Teste de pré-requisitos
Especialização em Métodos Quantitativos em Finanças e Riscos
FGV EMAp

Se você está se preparando para candidatar-se à Especialização em Métodos Quantitativos em Finanças e Riscos da FGV EMAp aconselhamos que tente fazer todas as questões abaixo. Note que algumas delas podem ser mais desafiadoras e talvez exijam que você revise algum conceito. Esperamos que você tenha conhecimentos equivalentes aos tópicos dos seguintes cursos de graduação da FGV EMAp:

- Cálculo em uma Variável
- Álgebra Linear
- Cálculo em Várias Variáveis
- Teoria da Probabilidade

Clique no nome do curso para acessar a ementa e a bibliografia dos cursos.

Cálculo em uma e várias variáveis

Questão 1 Determine o valor das integrais abaixo:

a) $\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$.

b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin(2x)\,dx$.

Questão 2 Um fabricante de ração para cães deseja embalar o produto em latas cilíndricas de metal, cada uma das quais deve conter um certo volume V_0 de ração. Encontre a razão entre a altura da lata e seu raio quando a quantidade de metal usada para fazer a lata é minimizada. Suponha que as bases e a lateral da lata sejam feitas de metal com a mesma espessura.

Questão 3 Considere a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por:

$$f(x,y)=x^3+y^3-3xy.$$

a) Encontre os pontos críticos de $f(x,y)$, ou seja, os pontos onde $\nabla f(x,y)=0$.

b) Classifique cada ponto crítico como um máximo local, mínimo local ou ponto de sela usando o teste da segunda derivada (Hessiana).

c) Determine os valores máximo e mínimo da função, se existirem.

Questão 4 A equação diferencial parcial (EDP) de Black-Scholes para o preço $V(S,t)$ de uma opção de compra europeia é:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0,$$

com $V(S,T)=\max\{S-K,0\}$, onde:

- S é o preço do ativo subjacente,
- t é o tempo,
- σ é a volatilidade do ativo,
- r é a taxa de juros livre de risco,
- K é o strike e T é a maturidade.

A solução dessa equação é a famosa fórmula de Black–Scholes:

$$V(S,t) = S\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2),$$

onde:

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

e

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

é a função de distribuição acumulada da distribuição normal padrão.

a) Mostre que se V é definida como no item anterior, então

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} = \Phi(d_1).$$

b) Verifique que V de fato satisfaz a EDP de Black–Scholes.

Álgebra Linear

Questão 5 Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Encontre os autovalores e autovetores de A.

b) Diagonalize A, ou seja, encontre matrizes P inversível e D diagonal tais que $A = PDP^{-1}$.

Questão 6 Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

a) Calcule o posto de A.

b) Encontre uma base para o espaço coluna de A.

c) Determine o núcleo de A.

Questão 7 Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

a) Encontre os autovalores de A.

b) Mostre que A é positiva definida.

c) Realize a decomposição de Cholesky de A, ou seja, encontre uma matriz triangular inferior L tal que $A = LL^T$.

Questão 8 Sejam $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Considere o subespaço S gerado por $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

a) Encontre a matriz P que projeta ortogonalmente qualquer vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ sobre o subespaço S.

b) Use P para projetar o vetor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ sobre S.

c) Verifique que o vetor residual $\mathbf{r} = \mathbf{v} - P\mathbf{v}$ é ortogonal ao subespaço S.

Probabilidade e Estatística

Questão 9 Uma urna contém 20 bolas vermelhas, 10 bolas azuis e 5 bolas verdes.

a) Se uma bola é retirada aleatoriamente dessa urna, qual é a probabilidade de a bola retirada ser vermelha?

b) Se uma bola é retirada aleatoriamente dessa urna, qual é a probabilidade de a bola retirada não ser azul?

c) Se duas bolas forem retiradas com reposição, qual é a probabilidade de ambas serem verdes?

d) Se forem amostradas 10 bolas sem reposição, qual a probabilidade de serem selecionadas exatamente 4 bolas vermelhas?

Questão 10 A altura de adultos em uma cidade segue uma distribuição normal com média de 170 cm e desvio padrão de 10 cm.

a) Qual é a probabilidade de uma pessoa selecionada ao acaso ter altura entre 160 cm e 180 cm?

b) Qual é a altura que delimita os 5% maiores valores da distribuição?

c) Se uma amostra de 25 pessoas for retirada, qual será o desvio padrão da média amostral?

Questão 11 Em uma empresa, 60% dos funcionários são homens e 40% são mulheres. Sabe-se que 70% dos homens e 80% das mulheres têm formação universitária.

a) Qual é a probabilidade de um funcionário selecionado aleatoriamente ter formação universitária?

b) Sabendo que um funcionário tem formação universitária, qual é a probabilidade de ele ser mulher?

c) Os eventos "ser homem" e "ter formação universitária" são independentes? Justifique sua resposta.

Questão 12 Uma urna contém duas moedas:

- A moeda 1 é justa (50% cara, 50% coroa).

- A moeda 2 é viciada, com 80% de chance de dar cara e 20% de dar coroa.

Uma moeda é escolhida aleatoriamente e lançada 3 vezes.

a) Qual é a probabilidade de obter exatamente 2 caras nos 3 lançamentos?

b) Sabendo que o resultado foi exatamente 2 caras, qual é a probabilidade de a moeda escolhida ser a moeda 2?

c) Se o experimento fosse repetido 100 vezes, qual seria o número esperado de vezes em que se obteria 2 caras?

Questão 13 Suponha que o vetor aleatório contínuo (X, Y) tem a seguinte função de densidade conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} c(4x^2y + y^2), & x \in [0,1], y \in [0,1] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para alguma constante c.

a) Calcule $P(X + Y > 1.5)$.

b) Calcule $\mathbb{E}[Y]$.

c) Determine $\text{Cov}(X, Y)$.

d) Qual é $f(x|y)$, a função densidade de probabilidade condicional de x dado y?

e) Calcule $\mathbb{E}[X|Y = 0.5]$.